

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZW 1953 - 019

Over de bepaling van een limiet

H.J.A. Duparc en W. Peremans



1953

Over de bepaling van een limiet.

H.J.A. Duparc en W. Peremans.

Gevraagd werd te bepalen de limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ , waarbij

$$U_n = \prod_{k=1}^n A^{-\frac{1}{k \sqrt{\log n + \alpha}}} \left( 1 + \frac{A^{\frac{1}{\sqrt{\log n + \alpha}}}}{k} - 1 \right);$$

hierin stellen A en  $\alpha$  reële getallen  $\geq 0$  voor.

Stelt men  $w = \sqrt{\log n + \alpha}$ , dan heeft men

$$\log U_n = S_1 + S_2,$$

waarbij

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \left\{ \log \left( 1 + \frac{A^{\frac{1}{w}}}{k} - 1 \right) - \frac{A^{\frac{1}{w}}}{k} + 1 \right\},$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{A^{\frac{1}{w}}}{k} - 1 - \frac{1}{kw} \log A \right).$$

Wegens  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{\frac{1}{w}} - 1 = 0$  heeft men voor voldoende grote n de relatie

$$\left| \frac{A^{\frac{1}{w}}}{k} - 1 \right| < 1, \text{ derhalve } \left| \log \left( 1 + \frac{A^{\frac{1}{w}}}{k} - 1 \right) - \frac{A^{\frac{1}{w}}}{k} + 1 \right| \leq C \frac{(A^{\frac{1}{w}} - 1)^2}{k^2},$$

waarbij C een geschikt gekozen constante voorstelt.

$$\text{Dus } |S_1| \leq C (A^{\frac{1}{w}} - 1)^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{C\pi^2}{6} (A^{\frac{1}{w}} - 1)^2 < \varepsilon$$

als n voldoende groot is. Bijgevolg  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = 0$ .

Verder geldt

$$\begin{aligned} S_2 &= \left( A^{\frac{1}{w}} - 1 - \frac{\log A}{w} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \left( A^{\frac{1}{w}} - 1 - \frac{\log A}{w} \right) (\log n + \gamma + O(\frac{1}{n})) \\ &= \left( \frac{\log^2 A}{2w^2} + O(\frac{1}{w^3}) \right) (\log n + \gamma + O(\frac{1}{n})) \\ &= \frac{1}{2} \log^2 A + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right), \end{aligned}$$

waarbij  $\gamma$  de constante van Euler voorstelt.

$$\text{Dus } \lim_{n \rightarrow \infty} S_2 = \frac{1}{2} \log^2 A.$$

$$\text{Derhalve } \lim_{n \rightarrow \infty} \log U_n = \frac{1}{2} \log^2 A$$

$$\text{en } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = e^{\frac{1}{2} \log^2 A} = A^{\frac{1}{2} \log A}.$$